0CONCOURS DE RECRUTEMENT DE PROFESSEURS
DE LYCEE PROFESSIONNEL AGRICOLE

SESSION : 2006

Concours : EXTERNE
Section : Mathématiques – Sciences physiques

EPREUVE N° 1

MATHÉMATIQUES

(Coefficient : 2 - Durée : 4 heures)

L'épreuve est constituée de deux problèmes.

Le premier problème de géométrie comporte deux parties. La première est consacrée à l'image d'un arc de cercle par une application géométrique du plan, traitée avec l'aide des nombres complexes. La deuxième partie débouche sur la recherche de l'ensemble des points M du plan vérifiant, $MA+MB=MC$, où A, B, C, sont les trois sommets d'un triangle équilatéral.

Le deuxième problème d'analyse, est composé de deux parties :
- *la première a pour objet l'identification d'une famille de fonctions vérifiant certaines propriétés algébriques.*
- *les résultats de cette première partie sont utilisés dans la deuxième partie, consacrée à la modélisation d'un phénomène aléatoire.*

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'utilisation des instruments de calcul est autorisée, notamment celle des calculatrices de poche à condition qu'elles soient à fonctionnement autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante.

PREMIER PROBLÈME

On se place dans le plan affine euclidien orienté $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Le point de coordonnées (x,y) est caractérisé par son affixe, le nombre complexe $z = x + iy$.

Soient A, B, C les points d'affixes respectives -1, 1 et $i\sqrt{3}$. On note $(\mathscr{C})$ le cercle circonscrit au triangle ABC et (Π) le demi-plan ouvert, ensemble des points du plan $\mathcal{P}$ d'ordonnées strictement négatives. On note $(\mathscr{C}_1)$ l'arc du cercle $(\mathscr{C})$ contenu dans le demi-plan (Π).

Soit f l'application de l'ensemble $\mathbb{C}-\{-1\}$ dans $\mathbb{C}-\{1\}$ qui, à tout nombre complexe z différent de -1, associe le nombre complexe z' tel que $z' = \dfrac{z-1}{z+1}$.

On note F l'application du plan $\mathcal{P}$ privé du point A dans le plan $\mathcal{P}$ privé du point B qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' égale à $f(z)$.

1- Étude de l'image de l'arc $(\mathscr{C}_1)$ par l'application F.

a. Quelle est la nature du triangle ABC ?

b. Déterminer les images B' et C' respectivement des points B et C par l'application F.
On note c l'affixe du point C'. Déterminer le module et un argument de c.

c. Construire sur une même figure les points A, B, C, B', C' et le cercle $(\mathscr{C})$.

d. Démontrer que l'application f est une bijection de $\mathbb{C}-\{-1\}$ sur $\mathbb{C}-\{1\}$ et préciser son application réciproque f^{-1}.

e. Soit M un point d'affixe z, distinct des points A et de B. Soit θ une mesure de l'angle $(\vec{MA}, \vec{MB})$.

i. Établir une relation entre θ et $\arg z'$. En déduire que l'image du cercle $(\mathscr{C})$ privé du point A par l'application F est une droite $(\mathscr{D})$ que l'on déterminera.

ii. Déterminer l'image de l'arc $(\mathscr{C}_1)$ par l'application F.

2- Étude de l'ensemble des points M du plan vérifiant la condition $MA + MB = MC$.

a. Soit u un nombre complexe.

Démontrer que $|u|+1 = |u+1|$ si et seulement si u est un nombre réel positif.

b. Soit $j = exp\left(i\dfrac{2\pi}{3}\right)$. Pour tout nombre complexe z de $\mathbb{C}-\{-1\}$ on pose $z' = f(z)$.

Démontrer que $j(jz'+1) = \dfrac{i\sqrt{3}-z}{z+1}$.

c. Soit M un point du plan $\mathcal{P}$ d'affixe z distinct du point A.

Démontrer que $MA + MB = MC$ si et seulement si $|z'| + 1 = |jz'+1|$.

d. En déduire l'ensemble des points M du plan $\mathcal{P}$ tels que $MA + MB = MC$.

DEUXIÈME PROBLÈME

PARTIE I

L'objet de cette partie est de déterminer l'ensemble E des fonctions numériques f définies sur l'intervalle $[0,+\infty[$ vérifiant simultanément les trois propriétés suivantes :

- Pour tout nombre réel positif ou nul t, $f(t)\leq 1$.
- Il existe un nombre réel strictement positif t_0 tel que $f(t_0)\neq 0$, ce qui signifie que f n'est pas identiquement nulle sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
- Pour tous nombres réels positifs ou nuls t et s, on a : $f(t+s)=f(t)f(s)$.

On rappelle les deux propriétés du corps des nombres réels suivantes :

Propriété A : Pour tout nombre réel t strictement positif, il existe un entier naturel n tel que $nt>1$.

Propriété B : Pour tout nombre réel x, il existe deux suites adjacentes de nombres rationnels (r_n) et (s_n) telles que pour tout entier naturel n : $r_n \leq x \leq s_n$.

1- On suppose qu'il existe une fonction f dans l'ensemble E.

a. Vérifier que, pour nombre réel positif ou nul t et pour tout nombre entier naturel non nul p,

$$f(pt)=[f(t)]^p .$$

En déduire que, pour tout nombre réel t positif ou nul, $f(t)\geq 0$.

a. Démontrer que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

b. En déduire que $f(0)\neq 0$, puis que $f(0)=1$.

Démontrer que $f(1)>0$. On pourra utiliser la propriété A ci-dessus et le sens de variation de la fonction f.

Expliquer pourquoi il existe un nombre unique a positif ou nul tel que $f(1)=e^{-a}$.

c. Pour tout nombre entier naturel q non nul, déterminer le nombre $f\left(\frac{1}{q}\right)$ en fonction de a et de q.

En déduire, pour tout nombre rationnel positif ou nul r, l'expression de $f(r)$ en fonction de a et de r.

d. Démontrer que, pour tout nombre réel positif ou nul t, $f(t)=e^{-at}$.

2- Déterminer l'ensemble E.

PARTIE II

On s'intéresse au flux de voitures se présentant à un péage d'autoroute. On considère que les voitures se présentent de façon aléatoire.

Soient u et v deux nombres réels positifs ou nuls tels que $u \leq v$, et, n un nombre entier naturel.

On note $A_n(u,v)$, l'événement « n voitures se présentent à ce péage dans l'intervalle de temps $[u,v]$ ».

Soit X_t la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de voitures se présentant à ce péage entre les instants 0 et t, où t est un nombre réel positif ou nul.

Pour tout nombre entier naturel n, on définit la fonction f_n sur $[0,+\infty[$ par $f_n(t)=P(X_t=n)=P(A_n(0,t))$.

L'objet de cette partie est de modéliser la loi de la variable aléatoire X_t en faisant les trois hypothèses suivantes (H_1), (H_2), (H_3) :

- (H_1). Le nombre de voitures se présentant dans un intervalle donné **ne** dépend **que** de l'amplitude de l'intervalle et est nul si cette amplitude est nulle, ce qui se traduit par :

  Pour tous nombres réels positifs ou nuls u et v tels que $u \leq v$, et, pour tout nombre entier naturel n, on a : $P[A_n(u,v)]=P[A_n(0,v-u)]$.

  $P[A_0(u,u)]=P[A_0(0,0)]=1$, c'est à dire $f_0(0)=1$.

  Pour tout nombre entier naturel non nul n, $P[A_n(u,u)]=P[A_n(0,0)]=0$, c'est à dire $f_n(0)=0$.

- (H_2). Le nombre de voitures se présentant dans l'intervalle de temps $[t,t+s]$ est indépendant du nombre de voitures se présentant dans l'intervalle de temps $[0,t]$, ce qui se traduit par :

  Pour tous nombres réels positifs t et s, et, pour tous nombres entiers naturels n et p, les événements $A_n(t,t+s)$ et $A_p(0,t)$ sont indépendants.

- (H_3). Lorsque l'amplitude de l'intervalle de temps tend vers 0, la probabilité qu'il se présente une voiture est équivalente à la probabilité qu'il s'en présente au moins une, ce qui traduit par : $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-f_0(t)}{f_1(t)}=1$.

1- Détermination de la fonction f_0.

On admet qu'il existe un nombre réel strictement positif t_0 tel que $f_0(t_0)\neq 0$.

a. Justifier que, pour tous nombres réels positifs ou nuls t et s, $A_0(0,t+s)=A_0(0,t)\cap A_0(t,t+s)$.

En déduire que $f_0(t+s)=f_0(t)f_0(s)$.

b. Démontrer qu'il existe un nombre réel strictement positif a tel que pour tout nombre t positif ou nul, $f_0(t)=e^{-at}$. On utilisera les résultats de la partie I.

2- Démontrer que $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f_1(t)}{t}=a$.

En déduire que la fonction f_1 est dérivable en 0 et déterminer $f_1'(0)$.

3- Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 2.

Démontrer que, pour tout nombre réel positif ou nul t, $0 \leq f_n(t) \leq 1 - f_0(t) - f_1(t)$.

En déduire que la fonction f_n est dérivable en 0 et $f_n'(0) = 0$.

4- Soient, n est un nombre entier naturel non nul, t un nombre réel positif ou nul et h est un nombre réel strictement positif.

a. Vérifier que $A_n(0, t+h) = \bigcup_{k=0}^{n} [A_k(0,h) \cap A_{n-k}(h, t+h)]$.

b. En déduire que $f_n(t+h) = \sum_{k=0}^{n} f_k(h) \times f_{n-k}(t)$.

c. Démontrer que $\frac{f_n(t+h) - f_n(t)}{h} = f_n(t)\frac{e^{-ah} - 1}{h} + \sum_{k=1}^{n} f_{n-k}(t)\frac{f_k(h)}{h}$.

d. En déduire que la fonction f_n est dérivable à droite sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

On admet qu'elle est dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

Démontrer que, pour tout nombre réel positif ou nul t, $f_n'(t) = a[f_{n-1}(t) - f_n(t)]$.

5- Pour tout nombre entier naturel n, Q_n désigne la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $Q_n(t) = f_n(t)e^{at}$.

a. Vérifier que, pour tout nombre entier naturel n non nul et pour tout nombre réel positif ou nul t,

$$Q_n'(t) = a\,Q_{n-1}(t) \text{ et } Q_0(t) = 1.$$

b. En déduire que, pour tout nombre entier naturel n non nul et pour tout nombre réel positif t,

$$Q_n(t) = \frac{(at)^n}{n!}.$$

6- Pour tout nombre réel strictement positif t, identifier la loi de probabilité de la variable aléatoire X_t.